5^a LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA II

(2013-1)

1. Considere duas partículas idênticas, de massa m, confinadas em um poço quadrado de largura a:

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & 0 < x_1 < a \quad \text{e} \quad 0 < x_2 < a \\ \infty & x_1\,,\, x_2 \leq 0 \;\; \text{ou} \;\; x_1\,,\, x_2 \geq a\,. \end{cases}$$

Supondo que o estado de spin das partículas é simétrico:

(a) Construa as funções de onda dos dois primeiros níveis de energia de bósons e férmions, partindo das funções de onda de uma partícula:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\, x}{a}\right)\;.$$

(b) Determine as energias permitidas a bósons e férmions.

(c) Suponha que as partículas sejam levemente perturbadas por uma interação mútua do tipo

$$V'(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m\Omega^2\,(x_1 - x_2)^2\;.$$

($\hbar\Omega << \hbar^2\pi^2/2ma^2$). Determine a correção na energia do estado fundamental de férmions e bósons em primeira ordem da teoria de perturbação .

(d) Determine a correção na energia do primeiro estado excitado de bósons e compare com o resultado do item anterior para férmions. Discuta fisicamente a diferença entre os dois resultados.

2. A função de onda normalizada de um sistema composto por dois férmions idênticos, de spin $3/2$, é dada por

$$\psi(x_1, x_2) = N(x_1 + x_2)\, e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2\sigma}\;,$$

onde N e σ são constantes. Determine os possíveis resultados de uma medida do spin total do sistema.

3. Duas partículas idênticas encontram-se sob a ação de um potencial harmônico com hamiltoneano $H = \hbar\omega\,(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)$. O sistema é afetado por uma perturbação do tipo $V = ig(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)$. Determine a correção de primeira ordem dos dois primeiros níveis de energia de:

   (a) Partículas distinguíveis,

   (b) Bósons,

   (c) Férmions.

4. Considere uma partícula espalhada por um potencial do tipo função delta com simetria esférica: $V(r) = \alpha\,\delta(r-a)$, onde α e a são constantes.

   (a) Construa a expansão em ondas parciais para a onda espalhada e obtenha os deslocamentos de fase associados a cada componente.

   (b) Obtenha a seção de choque de espalhamento no limite de baixas energias, ou seja, $a << \lambda$.

   (c) Obtenha a amplitude de espalhamento utilizando a aproximação de Born. Tome o limite de baixa energia e compare com o resultado obtido no item anterior.

5. Considere uma partícula de massa m sob ação do potencial central

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a\ . \end{cases}$$

   onde V_0 é uma constante positiva.

   (a) Escreva a equação radial para a função de onda da partícula. Obtenha a solução associada ao estado ligado ($E < 0$) com $l = 0$ (onda s).

   Resposta:

$$u_0(r) = \begin{cases} A\,e^{-\alpha r} & r < a \\ B\,\mathrm{sen}\Big(\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}\,r\Big) & r > a\ , \end{cases}$$

   onde $k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$ e $\alpha = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$.

(b) Escreva a condição de continuidade da função de onda em $r = a$, e mostre a seguinte relação que determina a energia do estado ligado com $l = 0$:

$$\tan\left(\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}\, a\right) = -\frac{\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}}{\alpha} \ .$$

Mostre que não há estado ligado se a profundidade do potencial (V_0) for muito pequena.

(c) Obtenha a solução associada ao espalhamento da partícula ($E > 0$) com $l = 0$ (onda s).

Resposta:

$$u_0'(r) = \begin{cases} A\,\mathrm{sen}(k\,r + \delta_0) & r > a \\ B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{k_0^2 + k^2}\, r\right) & r < a \ , \end{cases}$$

onde $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}\,$.